



DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS

HEC

CONCOURS D'ADMISSION 2009

SUR CLASSES PREPARATOIRES ECONOMIQUES ET COMMERCIALES ET
CLASSES PREPARATOIRES LITTERAIRES

RAPPORTS DES EPREUVES ORALES

B.P 31 – 78354 JOUY-EN-JOSAS CEDEX – FRANCE
WWW.CONCOURS-BCE.COM

SOMMAIRE

Analyse Economique et Historique des sociétés contemporaines	3
Aptitude logique	4
Culture et Sciences Humaines	5
Entretien Face à Face	6
Histoire Géographie et Géopolitique du Monde Contemporain	9
Mathématiques	11
Allemand	23
Anglais	26
Arabe	28
Espagnol	29
Portugais	33
Moyennes et écarts-type des épreuves orales	34

ANALYSE ECONOMIQUE ET HISTORIQUE DES SOCIETES CONTEMPORAINES (option économique)

L'épreuve orale se déroule de la manière suivante. Le jury est composé de deux personnes un historien et un économiste. Le candidat dispose de 30 minutes pour préparer l'un des deux sujets qu'il a tiré (ces deux sujets sont toujours très différents l'un de l'autre). Devant le jury le candidat a environ dix minutes pour traiter le sujet. Un plan structuré autour de deux parties et deux sous-parties est proposé par les candidats dans la quasi-totalité des cas. A la suite de cette présentation une discussion d'environ une dizaine de minutes s'engage avec le jury autour de ce sujet avec la possibilité que la discussion glisse vers d'autres points du programme à la faveur des éléments développés par le candidat.

Les candidats sont évalués sur l'aptitude à analyser des problèmes économiques et sociaux auxquels sont confrontées les sociétés contemporaines. Ils doivent aborder le sujet en faisant preuve d'un esprit scientifique c'est-à-dire en s'appuyant sur des connaissances précises et en mobilisant les outils de l'analyse économique et de l'analyse historique.

Comme pour l'écrit les membres du jury regrettent que les candidats se sentent obligés d'intégrer des « concepts » convenus dont on devine qu'ils sont prêts à les utiliser quel que soit le sujet proposé et qui conduisent à passer à côté de la complexité des situations (« profil en vol d'oies sauvages », « triomphe et fin du Fordisme », « révolution des trois D ».... Plus généralement les correcteurs regrettent également un manque de nuance dans les affirmations des candidats.

Exemples de sujets proposés en juin-juillet 2009.

La bourse doit-elle influencer la politique économique ?

Qu'est-ce que la guerre de 1914-1918 a changé à l'économie mondiale ?

Changes fixes ou changes flottants ?

La récurrence des crises financières.

Le rôle de l'Etat au XX^e siècle.

Les externalités.

Le dollar au XX^e siècle, une devise leader ?

L'inflation en France au XX^e siècle.

Le libre échange a-t-il un sens ?

Est-ce que « trop d'impôt tue l'impôt » ?

La mondialisation menace-t-elle les Etats ?

Faut-il empêcher les concentrations d'entreprises ?

L'endettement des Etats.

APTITUDE LOGIQUE (options littéraires A/L et LSH)

L'épreuve consiste, en une vingtaine de minutes, à analyser un texte ancien ou moderne posant explicitement ou implicitement un problème logique. Ce texte avait été remis au candidat 45 minutes avant l'épreuve.

La brève question numérique prévue en fin d'interrogation porte sur des questions élémentaires (pourcentages, proportionnalité, ordres de grandeur d'un résultat de calcul, croissance géométrique, etc.). La baisse de la TVA au 1^{er} juillet 2009 a été largement exploitée par le jury.

Les sujets proposés cette année étaient d'auteurs très divers, dans le temps, l'espace et leur thème de préoccupation. Ils allaient d'Aristote à Jacques Attali, en passant par Laplace, Leibniz, Poincaré, Borel, ainsi qu'à des commentateurs récents de ces auteurs. A titre d'exemples, Poincaré s'interrogeait sur la récurrence et ses liens avec l'induction, un commentateur de Pascal, Ernest Coumet, rappelait la formule de Cournot selon laquelle le retard qui marque la naissance de la théorie du hasard est « un pur effet du hasard ». La « loi unique du hasard », selon laquelle un événement de probabilité assez faible est praxéologiquement impossible, faisait de Borel un anachronique détracteur du principe de précaution.

Selon la norme, aucune connaissance scientifique ou mathématique dépassant le niveau du collège n'est requise pour étudier ces textes ; seule l'aptitude logique, y compris sous son aspect critique est nécessaire.

Quelques candidats ont impressionné le jury par la qualité de leur exposé (plan, articulation de l'argumentation, éloquence). Ils ont beaucoup lu, notamment les grands classiques de l'épistémologie et n'ont pas hésité à justifier ou critiquer les démographes du XIX^{ème} siècle avec des arguments ou des exemples modernes (la contraception, la transition démographique, etc.). A un exemple donné dans le texte, ils en opposent un d'un autre auteur et comparent la logique des deux situations.

Quelques uns ont expliqué leur méconnaissance des notions basiques du raisonnement logique : ignorent-ils le titre de l'épreuve ? Certains candidats se sont contentés de lire le texte devant le jury, éventuellement en le paraphrasant presque ligne à ligne. D'autres ont mal géré leur temps, annonçant au bout de cinq minutes qu'ils avaient fini.

Le jury rappelle que la préparation n'a rien de spécifique à cette épreuve. Les mathématiques étant le champ d'application privilégié de la logique, il est bon de rafraîchir ses souvenirs de collège, pourquoi pas par des actions de soutien scolaire : on ne comprend bien que ce que l'on explique à d'autres. Les rudiments de logique et en particulier le sens des termes les plus courants (raison, rationalité, preuve, argument, syllogisme, déduction, induction, etc.) sont naturellement nécessaires.

CULTURE ET SCIENCES HUMAINES (toutes options)

Le jury constate avec satisfaction que certaines de ses recommandations des années précédentes ont été entendues : les candidats en majorité s'efforcent de suivre un plan, clairement annoncé – d'éliminer des formules inutiles, comme « quelque part », « au final » – de fournir des exemples appropriés. La mythologie est souvent connue.

Néanmoins, demeurent des insuffisances : les candidats ignorent tout de l'histoire des sciences, des sciences humaines – un sujet sur la magie n'a donné lieu à aucune référence, même provoquée, à l'ethnologie – et méconnaissent complètement la chronologie. On peut aussi s'étonner que certains ne sachent pas qui est Caïn. Il faut enfin leur signaler qu'il serait plus que souhaitable, nécessaire, d'avoir lu un certain nombre d'œuvres classiques en entier, sans se contenter de quelques extraits, par exemple le Discours de la méthode qui n'est pas si long, ou quelques pièces de théâtre, etc.

Un phénomène inquiétant perdure : l'incompréhension du sujet venant d'une analyse insuffisante soit du terme même qui le constitue, soit de la formule de l'énoncé. Cela ne doit pas faire oublier la réelle qualité de certains candidats qui ont su exposer et illustrer de façon pertinente les questions qui leur ont été proposées.

Quelques sujets :

Y a-t-il des domaines étrangers à la raison ?

Le mystère

L'illusion

L'être et le devenir

Le regret

« Raisonner est l'emploi de toute ma maison

le raisonnement en bannit la raison »

« Aucun coupable n'est absous devant son propre tribunal »

« C'était écrit »

« Nous ne sommes pas chez nous dans l'univers expliqué »

Le doute

La lettre et l'esprit

L'empire

Liberté, égalité, fraternité

ENTRETIEN FACE A FACE (toutes options)

Nous constatons, l'an dernier, contrastant fortement avec les années antérieures, que les candidats, dans leur grande majorité, semblaient avoir compris que l'épreuve n'est pas un affrontement entre deux protagonistes (le convaincant et le répondant) où le meilleur est celui qui domine et impose son approche et ses positions par tous les moyens.

Nous pouvons confirmer, cette année, cette compréhension se traduisant particulièrement par les éléments suivants :

- L'importance de l'écoute effective,
- La manifestation de l'autonomie de la pensée et du comportement,
- L'honnêteté intellectuelle, c'est à dire la capacité à se situer et à faire évoluer son point de vue dans le cadre d'une argumentation critique,
- Le sens de la responsabilité,
- L'interaction pacifique avec autrui.

Globalement, l'épreuve de face à face remplit bien son rôle d'évaluation des qualités suivantes :

- Argumentation, animation et analyse,
- Ecoute, réactivité, vivacité, qualités humaines,
- Observation, responsabilité, lucidité et synthèse.

L'absence de difficultés (à de très rares exceptions près) à convenir d'une note finale commune aux deux examinateurs du jury témoigne de la fiabilité de l'épreuve à évaluer les candidats.

La reformulation et l'enrichissement des sujets proposés cette année pour l'épreuve du face à face ont permis d'en améliorer la cohérence et l'intelligibilité au regard des critères d'évaluation de l'épreuve.

Si les objectifs et les enjeux de l'épreuve sont mieux compris par les candidats, les examinateurs tiennent cependant à attirer l'attention des futurs candidats sur différents travers constatés lors de la session 2009.

La rareté du questionnement du sens du sujet, indispensable pour construire une argumentation, l'importance de l'opinion (sans véritable exploration des critères à partir desquels on fonde son jugement), le poids de l'implicite et de l'idée que se font souvent les candidats sur ce qui permet de « se vendre », l'absence de doute et de mise en question des paradigmes enseignés conduisent à des prestations plutôt assertives et non à des réflexions construites et progressives.

Plus précisément, on peut noter les faiblesses suivantes :

1. En position de convaincant :
 - a. Une lecture partielle et incomplète du sujet avec une définition imprécise des termes et de la problématique proposée,
 - b. Le candidat choisit une position comme on choisit la couleur d'un vêtement sans se référer à des valeurs, des principes ou des enjeux,
 - c. Un plan souvent « convenu »,
 - d. Un manque de rigueur et de précision dans la structure de l'exposé ou dans la forme.
2. En position de répondant :
 - a. Un manque de recul, d'envergure, d'imagination,

- b. Un choix « par principe » de la position inverse de celle défendue par le convaincant sans expliciter ce qui fonde ce choix (raisonnement, lecture historique et théorique, principes ou valeurs personnels),
 - c. Une volonté affichée de façon un peu systématique et artificielle d'établir en fin d'épreuve une position commune qualifiée de « consensus »,
 - d. La répétition des positions déjà évoquées au moment de la conclusion sans synthèse réelle.
3. En position d'observateur :
- a. Trop de généralités, trop d'hésitations,
 - b. La recherche systématique des contradictions supposément exprimées par les candidats,
 - c. Un fréquent manque de discernement et une lecture souvent réductrice orientée sur des questions de forme (l'expression de qualités telles que la modestie, l'humilité, voire la politesse est souvent considérée comme un signe de faiblesse),
 - d. Une évaluation du débat souvent centrée sur l'obsession d'avoir obtenu ou non un consensus.

Distance, compréhension des paradoxes, humour restent des qualités appréciées des examinateurs...mais restent assez rares.

La maîtrise incertaine de la langue joue des tours pendables à certains candidats. Outre une lecture souvent au premier degré (le sujet « noblesse oblige : que vaut ce dicton dans l'entreprise aujourd'hui ? » n'appelle pas nécessairement un exposé historique sur l'aristocratie à travers les âges), le lexique fait parfois défaut : un manquement n'est pas un manque, la défiance ne peut être comprise comme un défi, la dévotion n'est pas le dévouement...sans compter des mots très mal compris comme déontologie.

L'épreuve de face à face n'a pas vocation à mesurer le savoir-vivre ni les bonnes manières des candidats même si naturellement la courtoisie et la cordialité sont appréciées.

Il faut rappeler que cette année encore la dérive formelle est présente :

- « Il a bien parlé en regardant son adversaire (sic !) »
- « Il a bien placé ses mains »
- « Leur ton était agréable »
- « Il a beaucoup d'aisance »...

A la limite, pour certains candidats, du moment qu'il y a un flot rhétorique continu, urbain, courtois...tout est parfait. L'objet du débat ne compte pas.

A cet égard, l'utilisation abusive du terme nuancer doit être dénoncée ! Egalement, le qualificatif certain (d'une certaine culture, un certain droit...).

Après ces critiques, force est de constater avec vigueur que de très nombreux candidats font preuve de qualités remarquables (dûment constatées par des notes exceptionnelles) dans les trois composantes de l'épreuve :

- Des convaincants réalistes, stratèges, assumant leur analyse et leur approche avec honnêteté, s'exprimant avec clarté et rigueur,
- Des répondants faisant preuve d'écoute et de tolérance, vifs, capables de sérier les problèmes et de réagir positivement à des propositions,
- Des observateurs lucides, attentifs à ce qui est dit (mais aussi à ce qui est implicite dans les argumentations) capables d'analyser un débat et d'en faire la synthèse avec finesse et respect.

La moyenne des notes de l'épreuve est, cette année, de 11,62 avec un écart-type de 2,34. Les notes s'échelonnent de 5 à 19.

Quelques exemples de sujet

Faut-il du charisme pour être dirigeant ?

Gouverner, est-ce choisir ?

Y a-t-il une éthique des affaires ?

Qu'est ce qu'un patron ?

Une marque ne s'impose-t-elle que parce qu'elle surprend ?

La gratuité rapporte-t-elle à l'entreprise ?

L'entreprise citoyenne est-ce une utopie ?

Doit-on donner la priorité au développement durable ?

Recrutement dans les entreprises : que pensez-vous de la discrimination positive ?

Y a-t-il un management au féminin ?

HISTOIRE GEOGRAPHIE ET GEOPOLITIQUE DU MONDE CONTEMPORAIN (option scientifique)

L'épreuve d'oral d'histoire-géographie-géopolitique s'avère un excellent moyen de repérer les qualités majeures des candidats admissibles.

Pour celles et ceux qui ont passé 20 minutes devant le jury, le bilan peut être extrêmement positif car les sanctions chiffrées couvrent tout l'éventail possible y compris les notes les plus élevées.

Reste cependant à éviter certains écueils que l'on répétera une fois de plus: d'abord bien lire et relire le sujet pour éviter un contre-sens ou une vue partielle de la thématique. Si le sujet peut présenter plusieurs interprétations, bien indiquer dans l'introduction (qui ne doit pas être trop longue) celle qui a été retenue.

La conclusion est très inégale: certains savent faire rebondir le sujet, d'autres se sentent obligés de faire une conclusion souvent très plate.

Ensuite, il va de soi qu'il est indispensable d'utiliser tout son temps de parole: un petit réveil devant soi (ou une simple montre) est d'une grande utilité.

L'attitude ne doit être ni excessivement discrète (on a du mal à entendre le candidat), ni désinvolte. L'exposé utilisera un vocabulaire approprié et non les formules à la mode qui sont souvent en décalage par rapport au sujet.

Certains progrès sont néanmoins notables: les plans sont moins "passe-partout" et répondent à une problématique définie en introduction; les localisations sont globalement satisfaisantes. De ce point de vue, travailler sur des cartes muettes (tant historiques: Europe en 1914... que géographiques: relief ou politique) doit faire partie de l'entraînement obligatoire des candidats. L'utilisation des cartes à l'oral peut encore être largement améliorée en particulier pour indiquer les flux, les mutations... Le Havre port breton, le charbon alsacien, Gênes et Barcelone inconnus... agacent à la longue. Il faut aussi savoir animer une carte par quelques flèches, différencier des aires géographiques, indiquer les zones de contacts ou de conflits... Avec un peu d'entraînement, une bonne utilisation de la carte muette est un "plus" très payant.

Ce qui a trait aux questions militaires reste encore fragile (le sous-marin nucléaire n'a pas la cote...). On peut attendre une définition précise de "finlandisation"; évoquer Clausewitz en deux mots.... D'une façon générale, les références culturelles ne s'observent que chez les meilleurs candidats: trop nombreux sont ceux qui hésitent à faire allusion au cinéma, à la littérature ou aux médias.

Ajoutons que quelques repères en histoire des technologies peuvent tenir sur une ou deux fiches pour éviter des anachronismes criants, cette dimension de l'histoire étant pleinement intégrée au programme.

Signe des temps avec des candidats nés autour de 1989, le socialisme, le communisme sont des notions floues d'un passé très lointain.

Lors des questions (l'oral se compose *aussi* du moment des questions!), un moment de réflexion avant de commencer permet d'éviter les dérapages. Une réponse construite, argumentée, basée sur un exemple, pas trop longue est appréciée du jury. Trop de candidats se contentent de réponses laconiques en attendant que le temps s'écoule. Or, les dernières minutes permettent au jury d'approfondir certains points ce qui peut être tout bénéfique mais aussi relativiser la bonne impression initiale.

Ces remarques doivent encourager les candidats à préparer consciencieusement une épreuve qui est à leur portée, qui peut faire la différence en terme de classement et qui est aussi une analyse sur l'évolution du monde contemporain.

MATHEMATIQUES (options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L)

Les épreuves orales de mathématiques concernent les candidats admissibles dans les options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L. Sur chacune des 4 sessions de 4 jours, ces épreuves ont mobilisé 3 à 4 jurys par demi-journée.

1. Procédure d'interrogation

Le sujet proposé aux candidats comprend deux parties:

- un *exercice principal* préparé pendant 30 minutes et portant sur l'une des trois parties suivantes du programme: *algèbre, probabilités et analyse*. De plus, une *question de cours* en rapport avec le thème de l'exercice fait partie de l'exercice principal.
- un *exercice sans préparation* portant sur une partie différente de celle de l'exercice principal, permettant de tester en temps réel les qualités de réactivité des candidats.

Rappelons que dans tous les cas, chaque candidat est interrogé en probabilités, soit au titre de l'exercice principal (20 à 25 minutes), soit à celui de l'exercice sans préparation (5 à 10 minutes).

2. Résultats statistiques

Par option, les notes moyennes obtenues sont les suivantes:

- *option scientifique* (469 candidats): 11,42 (10,68 en 2008);
- *option économique* (175 candidats): 10,84 (10,71 en 2008);
- *option technologique* (6 candidats): 12,50 (13,36 en 2008);
- *option littéraire B/L* (11 candidats): 10,00 (09,43 en 2008).

Pour les options scientifique et économique, l'étendue des notes est quasi maximal puisque les notes attribuées s'échelonnent entre 02 et 20, les écarts-type étant respectivement de 3,64 et 4,13.

Dans l'option technologique, on observe simultanément une baisse du nombre de candidats admissibles (de 11 à 6) et une contraction de la note moyenne sur les trois derniers concours (14,67 en 2007) avec une perte de plus de 2 points.

3. Commentaires

A l'issue des épreuves orales de mathématiques, on peut tirer un certain nombre d'enseignements:

- le *cours* est de mieux en mieux maîtrisé: la question de cours obligatoire en début d'exercice principal en témoigne même si les hypothèses des théorèmes de convergence sont parfois "escamotées"(théorème de transfert, théorème de l'esérance totale, etc.);
- l'*exercice sans préparation* en fin d'interrogation est entré dans les habitudes de cette épreuve: les candidats semblent peu déstabilisés et nombre d'entre eux montrent à cette occasion une vivacité intellectuelle surprenante ainsi que des capacités d'adaptation rapide devant une situation nouvelle, ce qui pondère positivement leur note finale (cas des candidats ayant produit un exposé moyen de leur exercice principal); cette situation est plus fréquente que la situation inverse, ce qui est rassurant quant au dynamisme des futurs élèves...
- une observation récurrente d'une année sur l'autre: les *fondamentaux* de l'enseignement secondaire ne sont pas suffisamment acquis (étude de fonctions et courbe représentative, maniement des techniques élémentaires de calculs, etc.);
- un *effet "vases communicants"* qui se manifeste cette année par de meilleures connaissances du programme d'*algèbre* (excepté les polynômes) au détriment de celui d'*analyse* (étude de suites notamment); ainsi à niveau de connaissances constant, on note sur des périodes de 2 à 3 ans en moyenne, des évolutions contrastées des connaissances des 3 parties du programme.

Les sujets suivants, posés aux candidats des options scientifique, économique, technologique et littéraire BL, constituent la première version d'un échantillon des sujets proposés lors des épreuves orales du concours 2009.

1 Sujets donnés en option scientifique

Sujet S 1 - Exercice

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{i=1}^n U_i$. On considère la variable aléatoire T définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ par :

$$T = \inf\{n \in \mathbb{N}^* / S_n \geq 1\}.$$

- 1) Question de cours : Densité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes à densité définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
- 2) On admet dans cette question que : $\mathbb{P}([S_n < 1]) = \frac{1}{n!}$ pour $n \geq 2$.
 - a) Que vaut $\mathbb{P}([T = 1])$?
 - b) Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'événement $[T = n]$ en fonction des événements $[S_n \geq 1]$ et $[S_{n-1} < 1]$.
 - c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la valeur de $\mathbb{P}([T = n])$.
 - d) Établir l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(T)$; calculer $\mathbb{E}(T)$.
- 3) a) Déterminer une densité de la variable aléatoire S_2 .
 b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une densité f_{S_n} de la variable aléatoire S_n est donnée par :

$$f_{S_n}(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{n}{j} (x-j)^{n-1} & \text{si } x \in [k-1, k], (1 \leq k \leq n) \\ 0 & \text{si } x \notin [0, n] \end{cases}$$

- c) En déduire que $\mathbb{P}([S_n < 1]) = \frac{1}{n!}$.

Sujet S 1 - Exercice sans préparation

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$. Soit f et g deux endomorphismes de E symétriques et ayant des valeurs propres strictement positives.

- 1) Prouver qu'il existe un endomorphisme ϕ de E ayant des valeurs propres positives tel que $f = \phi^2$ (ϕ^2 désigne $\phi \circ \phi$).
- 2) Montrer que :

$$\text{Ker}(f + g) = \text{Ker } f \cap \text{Ker } g.$$

Sujet S 2 - Exercice

- 1) Question de cours : Existence des moments d'une variable aléatoire discrète.
- 2) Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 2(1-x)^2 \ln(1-x)}{12x^2}$$

- a) Étudier les variations de f .

b) Montrer que, lorsque x tend vers 0^+ , $f(x) \sim \frac{x}{18}$.

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, strictement positives, indépendantes et de même loi.

On pose : $U = X_1 + X_2$, $T = X_1 - X_2$, $Y_1 = \frac{X_1}{U}$, $Y_2 = \frac{X_2}{U}$.

- 3) a) Montrer que Y_1 et Y_2 suivent la même loi et admettent des moments de tous ordres. Calculer $\mathbb{E}(Y_1)$ et $\mathbb{E}(Y_2)$.
 b) En déduire que $\frac{T}{U}$ admet des moments de tous ordres. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{T}{U}\right)$.
 c) Montrer que $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = -\mathbb{V}(Y_1)$. En déduire une formule reliant $\mathbb{V}\left(\frac{T}{U}\right)$ et $\mathbb{V}(Y_1)$.
- 4) On suppose que X_1 et X_2 suivent la loi géométrique de paramètre p ($p \in]0, 1[$). On pose $q = 1 - p$. On admet le résultat suivant : $\mathbb{V}(Y_1) = f(q)$.

À l'aide des résultats précédents, établir l'encadrement suivant :

$$0 < \mathbb{V}\left(\frac{T}{U}\right) < \frac{1}{3}$$

Sujet S2 - Exercice sans préparation

1- Montrer que pour $z > 0$, l'intégrale

$$J(z) = \int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

est convergente.

2- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J(z)$ est équivalent en $+\infty$ à $\frac{e^{-z}}{z}$.

Sujet S3 - Exercice

- 1) Question de cours : Donner la définition et les principales propriétés d'une fonction convexe sur un intervalle I de \mathbb{R} .

On admettra que si f est convexe sur I et $(x, y, z) \in I^3$, alors

$$f\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z\right) \leq \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(y) + \frac{1}{3}f(z).$$

- 2) Soient a, b et c trois réels strictement positifs, montrer que :

$$(abc)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

En déduire que :

$$(abc)^{\frac{1}{3}} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

en posant $(a', b', c') = (1/a, 1/b, 1/c)$,

3) Soient a_0, b_0 et c_0 trois réels strictement positifs. On définit par récurrence les suites $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}$ et $(c_n)_{n \geq 0}$ par les relations suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3} \\ b_{n+1} = (a_n b_n c_n)^{\frac{1}{3}} \\ c_{n+1} = \frac{3}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n}} \end{cases}$$

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les réels a_n, b_n et c_n sont bien définis et $0 < c_n \leq b_n \leq a_n$.
- b) Montrer que les suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(c_n)_{n \geq 0}$ sont monotones et que les trois suites $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}$ et $(c_n)_{n \geq 0}$ sont convergentes. On note λ, μ et ν leurs limites respectives.
- c) Montrer que $\lambda = \mu = \nu$.

d) On cherche maintenant à montrer que la suite $(b_n)_{n \geq 0}$ est toujours monotone.

1) Soient x, y et z trois réels, tels que $0 < x < y < z$. On note :

$$\begin{cases} s = x + y + z \\ d = xy + xz + yz \\ p = xyz \end{cases}$$

Montrer que $ps^3 - d^3$ est du signe de $xz - y^2$.
(on pourra remarquer que $ps^3 - d^3 = -(yz - x^2)(zx - y^2)(xy - z^2)$).

ii) En appliquant le résultat précédent à a_1, b_1 et c_1 , montrer que $b_3 - b_2$ est du signe de $b_2 - b_1$.
Conclure.

Sujet S3 - Exercice sans préparation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ une famille de n variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω , indépendantes et de même loi.

On définit la variable aléatoire :

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

- 1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$ tel que l'espérance $\mathbb{E}(e^{xS_n})$ existe et $\forall a \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(|S_n| \geq a) \leq e^{-ax} \mathbb{E}(e^{xS_n})$.
- 2) Appliquer ce résultat au cas où chaque X_i suit la loi définie par :

$$\mathbb{P}(|X_i| = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p.$$

Sujet S4 - Exercice

Si $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$, on pose $M(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$.

On note F le sous-ensemble de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ constitué des matrices $M(a)$ quand a parcourt \mathbb{R}^4 .

On note $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à n .

- a) Question de cours : Rappeler la définition du sous-espace vectoriel engendré par une famille (x_1, \dots, x_p) de vecteurs de E . Dans quel cas la famille (x_1, \dots, x_p) est-elle une base de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$?
- b) Soient E_1 de base (x_1, \dots, x_p) et E_2 de base (y_1, \dots, y_q) deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$. Montrer que la famille $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ est libre. Qu'en déduit-on sur $p + q$?
- 2) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et en donner la dimension.
- 3) Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de \mathbb{R}^4 . Pour $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, on pose $M_i = M(e_i)$. Montrer que $\forall i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, la matrice $M_i + J$ est inversible et que la famille $(M_i + J)_{1 \leq i \leq 4}$ est libre.
- 4) Soit $a \in \mathbb{R}^4$. Montrer que si pour tout réel θ non nul, la matrice $M(a) + \theta J$ est non inversible, alors $a = (0, 0, 0, 0)$.
- 5) Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui ne contient aucune matrice inversible et tel que $J \in G$.
 - a) Déterminer $G \cap F$ et en déduire que la dimension de G est inférieure ou égale à 12.
 - b) Existe-t-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de dimension 12 ne contenant aucune matrice inversible et contenant J ?

Sujet S 4 - Exercice sans préparation

Pour n entier naturel non nul, soit X_n une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de loi binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0, 1[$.

- 1) Montrer que pour $a > 0$ fixé, $\mathbb{P}(|X_n - np| \leq a)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- 2) Montrer que si $b > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > b\right) \leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} \min(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n})$$

Qu'en déduit-on pour $\mathbb{P}(|X_n - np| \leq nb)$ quand n tend vers $+\infty$?

Sujet S 5 - Exercice

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p ($p \in]0, 1[$).

On pose $q = 1 - p$, $U = X_1 + X_2$ et $T = X_1 - X_2$.

- 1) Question de cours : Définition et propriétés de la loi géométrique.
- 2) Déterminer la loi de U .
- 3) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
 - a) Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant l'événement $[U = n]$.
 - b) Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X_1 / U = n)$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X_1)$.
- 4) Déterminer la loi de T .
- 5) a) Calculer $\text{Cov}(U, T)$.
b) Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

Sujet S 5 - Exercice sans préparation

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 ayant comme matrice u dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .

- 1) On pose $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, -1, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 1, 0)$. Calculer $f(v_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$.
- 2) Montrer que M est diagonalisable et déterminer une matrice de passage P de la base canonique de \mathbb{R}^4 à une base de vecteurs propres de M contenant le plus possible de 0, les autres termes étant $+1$ ou -1 .
- 3) Déterminer M^2 , puis M^n pour $n \in \mathbb{N}$.
- 4) Déterminer à l'aide de P , la matrice des projecteurs de \mathbb{R}^4 sur chacun des sous-espaces propres de M .

Sujet S 6 - Exercice

1) Question de cours : Définition de la convergence absolue d'une série numérique. Lien entre convergence et convergence absolue.

2) a) Justifier pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$, la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt}}{\sqrt{\pi t}(1+e^{-2t})^p} dt$.
On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$:

$$I_{k,p} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt}}{\sqrt{\pi t}(1+e^{-2t})^p} dt$$

b) Calculer $I_{k,0}$ en fonction de k (on pourra utiliser le changement de variable $u = \sqrt{2kt}$, après l'avoir justifié).

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n,1}$

3) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer la somme $\sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{\sqrt{2j+1}}$ en fonction de $I_{2n+3,1}$ et $I_{1,1}$.

b) En déduire que la série de terme général $u_j = \frac{(-1)^j}{\sqrt{2j+1}}$ est convergente. Exprimer sa somme S en fonction de $I_{1,1}$.

4) Montrer que : $0 < S < 1$.

Sujet S 6 - Exercice sans préparation

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit $n \geq 1$ et (X_1, X_2, \dots, X_n) un n -échantillon indépendant, identiquement distribué de la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On suppose λ inconnu et on cherche à l'estimer par un intervalle de confiance.

On pose :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad T_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

A l'aide de T_n , déterminer, pour n grand, un intervalle de confiance de λ au risque α donné.

Sujet S 7 - Exercice

1) Question de cours : Diagonalisabilité d'une matrice, d'un endomorphisme.

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2 (en posant degré(0) = $-\infty$).

2) On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & -1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Calculer son rang, en déduire une valeur propre de M et la dimension du sous-espace propre associé. Donner une base de ce sous-espace propre.

3) On pose $P_1 = X^2 - 1$, $P_2 = X^2 - X + 1$ et $P_3 = X^2 + X + 1$. Montrer que $\mathcal{V} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de E .

On note $V_1 = \text{Vect}(P_1)$, $V_2 = \text{Vect}(P_1, P_2)$

4) On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice M dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de E .

- a) Exprimer, à l'aide de F , θ et n , les fonctions de répartition de U_n et V_n .
 b) Justifier, pour tout $\epsilon \in]0, 1[$, l'inégalité :

$$\mathbb{P}([-1 + \theta \leq U_n < -1 + \theta + 2\epsilon] \cap [1 + \theta - 2\epsilon < V_n \leq 1 + \theta]) \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{U_n + V_n}{2} - \theta\right| < \epsilon\right).$$

- c) En déduire que $\frac{U_n + V_n}{2}$ est un estimateur convergent de θ .
 d) Est-il sans biais ?

Sujet S 8 - Exercice sans préparation

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle déterminée par $x_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}$.

- 1) Etudier la monotonie et la limite éventuelle de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n^2 = 2n + x_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}$.
 3) En déduire un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.
 On pourra admettre que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$$

2 Sujets donnés en option économique

Sujet E 9 - Exercice

On étudie la vente d'un certain type de produit sur internet sur trois sites A, B, C et on fait les constatations suivantes :

- si un client choisit le site A pour un achat, il choisit indifféremment A, B ou C pour l'achat suivant,
- si un client fait un achat auprès du site B, il fait l'achat suivant sur le même site B,
- si un client fait un achat sur le site C, il choisira pour l'achat suivant le site A avec une probabilité $1/12$, le site B avec une probabilité $7/12$ et le site C avec une probabilité $1/3$.

Au départ le client choisit au hasard l'un des trois sites.

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par p_n , q_n et r_n les probabilités pour que, au n -ième achat, le client se fournisse respectivement auprès de A, B et C.

- 1) Question de cours : Énoncer la formule des probabilités totales.
- 2) Quelles sont les valeurs de p_1 , q_1 et r_1 ?
- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner une relation entre p_n , q_n et r_n .
- 4) Exprimer p_{n+1} , respectivement q_{n+1} et r_{n+1} , en fonction des trois réels p_n , q_n et r_n .
- 5) Pour $n \geq 2$, exprimer p_n en fonction de r_n et r_{n-1} .
- 6) Prouver que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite récurrente linéaire. Donner l'expression de r_n , puis p_n et q_n en fonction de n .
- 7) Étudier la convergence des trois suites $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Sujet E 9 - Exercice sans préparation

Donner un exemple de matrice M non nulle telle que $(I, M, {}^tM)$ soit une famille liée.

Dans quel cas de telles matrices sont-elles diagonalisables ?

Sujet E 10 - Exercice

1) Question de cours : Loi géométrique, espérance et variance.

2) Soit x un réel de $]0, 1[$.

a) Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}.$$

b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

c) En déduire la convergence de la série de terme général $\frac{x^k}{k}$ ainsi que l'égalité : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

3) Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui suit une loi géométrique de paramètre p ($0 < p < 1$).

On pose : $Y = \frac{1}{X}$.

a) Déterminer $Y(\Omega)$ et la loi de probabilité de Y .

b) Etablir, pour tout entier m de \mathbb{N}^* , l'existence du moment d'ordre m , $\mathbb{E}(Y^m)$, de Y .

c) Calculer $\mathbb{E}(Y)$ en fonction de p .

Sujet E 10 - Exercice sans préparation

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_3$?

2) Existe-t-il $C \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que $CA = I_2$?

Sujet E 11 - Exercice

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 3, u_1 = 29/9 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 9 - \frac{26}{u_{n+1}} + \frac{24}{u_n u_{n+1}} \quad (1).$$

1) Question de cours : Enoncer les résultats concernant les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

2) Ecrire une fonction en Pascal permettant de calculer la valeur du terme u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ entré par l'utilisateur.

3) Montrer qu'il existe une unique suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que :

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+3} = 9a_{n+2} - 26a_{n+1} + 24a_n \end{cases} \quad (2)$$

4) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^n + 3^n + 4^n$ (3).

5) Expliciter u_n en fonction de n , puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Sujet E 11 - Exercice sans préparation

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de loi géométrique de paramètres p_1 et p_2 respectivement ($p_i \in]0, 1[, i = 1, 2$).

On pose $U = X_1 + X_2$ et $T = X_1 - X_2$.

- 1) On suppose que $p_1 \neq p_2$. Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?
- 2) On suppose que $p_1 = p_2 = p$. Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

Sujet E 12 - Exercice

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose $N = A - I$ et $M = N^2 - N$ (où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).

Soient u et v les endomorphismes de \mathbb{R}^3 associés canoniquement aux matrices N et M .

- 1) Question de cours : Matrices semblables, définition et propriétés.
- 2) Etudier la diagonalisabilité de A .
- 3) Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de I et de M .
- 4) On suppose dans cette question que le rang de u est égal à 2.
 - a) Montrer l'existence d'un vecteur x de \mathbb{R}^3 tel que $\mathcal{B} = (u^2(x), u(x), x)$ soit une base de \mathbb{R}^3 .

En déduire que N est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- b) Exprimer la matrice de v dans la base \mathcal{B} et en déduire que M et N sont semblables.
- c) Conclure que A et A^{-1} sont aussi semblables.

Sujet E 12 - Exercice sans préparation

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On désigne l'espérance par \mathbb{E} .

- 1) Établir l'existence de $\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right)$.
- 2) Montrer que $\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$.

Sujet E 13 - Exercice

Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. Les proportions respectives de ces boules sont b pour les blanches, n pour les noires et r pour les rouges ($b + n + r = 1$).

On effectue dans cette urne des tirages successifs indépendants avec remise. Les proportions des boules restent ainsi les mêmes au cours de l'expérience.

On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- 1) Loi d'un couple de variables aléatoires réelles discrètes. Loïs marginales.
- 2) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note Z_k la variable aléatoire qui prend la valeur $+1$ si une boule blanche est tirée au k -ième tirage, -1 si une boule noire est tirée au k -ième tirage et 0 si une boule rouge est tirée au k -ième tirage. On note $S_k = Z_1 + \dots + Z_k$.
 - a) Trouver la loi de probabilité de S_1 . Calculer son espérance et sa variance. En déduire l'espérance et la variance de S_k .
 - b) Pour tout réel t strictement positif et pour tout k de \mathbb{N}^* , on pose $g_k(t) = \mathbb{E}(t^{S_k})$.
Expliciter $g_k(t)$ en fonction de t et de k .
 - c) Montrer que $g'_k(1) = \mathbb{E}(S_k)$ et retrouver le résultat de la question (a).

- 3) a) On note X_1 la variable aléatoire représentant le numéro du tirage auquel une boule blanche sort pour la première fois. Trouver la loi de probabilité de X_1 . Calculer son espérance et sa variance.
- b) Sachant que $X_1 = k$, quelle est la probabilité de tirer une boule rouge à chacun des $k - 1$ premiers tirages ?
- c) On note W la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges tirées avant l'obtention de la première boule blanche. Quelle est la loi conditionnelle de W sachant $X_1 = k$?
- d) En déduire la loi de W (sous forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à calculer).
- 4) On note Y_1 la variable aléatoire représentant le numéro du tirage auquel une boule noire sort pour la première fois.
 - a) Trouver, pour tout couple d'entiers strictement positifs (k, l) , la probabilité de l'événement $\{X_1 = k, Y_1 = l\}$ (On pourra distinguer selon que $k > l$, $k = l$ ou $k < l$). Les variables aléatoires X_1 et Y_1 sont-elles indépendantes ?
 - b) On se place, pour cette question, dans le cas particulier où $r = 0$ (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de boule rouge). Calculer alors la covariance de X_1 et Y_1 .

Sujet E 13 - Exercice sans préparation

Soit n un entier ≥ 2 et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n - \{(0, \dots, 0)\}$.

On pose : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, puis $B = {}^t X X$ et $A = X {}^t X$.

- 1) Écrire la matrice B .
- 2) Déterminer les vecteurs propres et les sous-espaces propres de la matrice A .

3 Sujets donnés en option technologique

Sujet T 14 - Exercice

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout n de \mathbb{N} : $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$.

- 1) Question de cours : Suites géométriques, convergence, somme.
- 2) a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.
- b) En déduire la nature (convergence ou divergence) de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 3) Montrer que l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$ d'inconnue x admet deux solutions réelles a et b que l'on déterminera ($a > b$).
- 4) a) Montrer que $b = 1 - a = -\frac{1}{a}$.
Établir l'encadrement suivant : $1 < a < 2$.
- b) Montrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} , on a : $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$.
- c) Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{a^n}$.

Sujet T 14 - Exercice sans préparation

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi uniforme sur $[-1, 3/2]$.

- 1) Déterminer la fonction de répartition, l'espérance et la variance de X .
- 2) On considère la variable aléatoire $Y = X^2$. Quel est l'ensemble des valeurs prises par Y ? Déterminer la fonction de répartition de Y . Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Sujet T 15 - Exercice

Soit f la fonction définie pour tout x réel par :

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où a est un réel donné.

- 1) Question de cours : Rappeler les définitions et les principales propriétés d'une densité et d'une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
- 2) Montrer que pour $a = 3/2$, on peut considérer f comme une densité d'une variable aléatoire réelle X .
- 3) a) Déterminer la fonction de répartition F de cette variable aléatoire X .
b) Donner l'allure de la courbe représentative de F dans un repère orthogonal du plan.
c) Résoudre successivement les trois équations : $F(x) = 1/4$, $F(x) = 1/2$, $F(x) = 3/4$.
- 4) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X .

Sujet T 15 - Exercice sans préparation

On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

- 1) Calculer J^2 , puis J^n en fonction de n , pour tout entier naturel n .
- 2) Calculer A^{2009} .

4 Sujets donnés en option BL

Sujet BL 16 - Exercice

- 1) Question de cours : Définition et propriétés de la loi exponentielle.

Soit p un nombre réel de $]0,1[$ et $q = 1 - p$. Soit λ et μ deux réels strictement positifs. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} q\lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ p\mu e^{\mu x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- 2) Vérifier que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, dont f est une densité.

- 3) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$.
- 4) a) Déterminer p , λ et μ tels que X vérifie :
pour tout $x \geq 0$, $\mathbb{P}([X > x]) = \mathbb{P}([X < -x])$.